

# Was ist Geometrische Feldtheorie ?

Ulrich BRUCHHOLZ\*

31. Oktober 2005

Das heutige physikalische Denken wird beherrscht von der Vorstellung von "Materie" in Raum und Zeit, welche alle Vorgänge um uns bestimme. Dabei kann niemand sagen, was Materie sei, und die Physik betrachtet es als ihre Aufgabe, dies zu ergründen.

Die seit langem bekannte Wirkung auf einen Körper ist eine Kraft bei beschleunigter Bewegung einerseits und durch Gravitation andererseits. Mit dem Begriff der Masse hat Isaac NEWTON ein Maß gefunden, das nur vom Körper selbst abhängt. Dabei *erscheint* es so, als ob es zwei qualitativ unterschiedliche Massen gäbe, nämlich eine träge und eine schwere Masse.

NEWTON hat abklären können, dass jede Masse ein Gravitationsfeld um sich aufbaut, das in seiner Wirkung um den Faktor  $1/r^2$  mit der Entfernung abnimmt. NEWTON hat dazu auch experimentell den Proportionalitätsfaktor, die Gravitationskonstante, bestimmt. Als Arbeitshypothese diente dabei die Annahme, dass Raum und Zeit für ewig vorgegeben und von der darin befindlichen Materie unabhängige Größen seien. Das bedeutet eine Fernwirkung, denn der eine Körper wirkt mit seiner Masse über die Gravitation unmittelbar auf den anderen Körper mit dessen Masse. Im täglichen Leben ist der dominierende Körper die Erde mit ihrem Gravitationsfeld. - NEWTON selbst war jedoch nie glücklich mit der Arbeitshypothese und der daraus

---

\*Dipl.-Ing. Ulrich Bruchholz, <http://www.bruchholz-acoustics.de>

resultierenden Fernwirkung. Die Trägheit bleibt dabei rätselhaft. NEWTON konnte nur zur Kenntnis nehmen, dass die zweite Ableitung des vom Körper zurückgelegten Weges nach der Zeit der bestimmende Faktor ist.

Einen großen Schritt in der Erkenntnis brachte die Erkundung des Elektromagnetismus. FARADAY beschrieb die elektrischen und magnetischen Felder mit von ihm so genannten Kraftlinien. Diese wirken nur von einem Punkt bis zum benachbarten Punkt, von diesem wieder bis zum nächsten und so fort sowohl im Raum als auch in der Zeit. Diese Wirkung erfolgt nicht sprunghaft, sondern von Punkt zu Punkt gibt es nur entsprechend geringe Änderungen. Die berechnete Frage nach den Punktabständen kann dahingehend beantwortet werden, dass diese *beliebig* klein gewählt werden. Man spricht dann vom Kontinuum, und die Wirkung ist eine *Nahewirkung* .

Eine wesentliche Konsequenz aus der Nahewirkung ist die Vorhersage der elektromagnetischen Wellen durch MAXWELL, die zuerst Heinrich HERTZ experimentell nachgewiesen hat. Dazu gehört auch das Licht, so dass die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt.

Jetzt begann die Suche nach dem angenommenen Medium, in dem sich die elektromagnetischen Wellen ausbreiten sollen. Dabei irritierte besonders die völlige Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Relativbewegung des Beobachters zur Lichtquelle. Aber es gibt auch keine Abhängigkeit von einer absoluten Bewegung (z.B. der Erde beim Umlauf um die Sonne), wie der bekannte MICHELSON-Versuch zeigte. Damit war die Existenz eines solchen Mediums, auch als Äther bekannt, überhaupt in Frage gestellt.

Diese *scheinbaren* Unstimmigkeiten bewogen Albert EINSTEIN, sich mit Relativbewegungen zu befassen. - In der Mechanik gibt es so genannte Inertialsysteme (Trägheitssysteme), die sich geradlinig und unbeschleunigt bewegen. Das Verhalten von Körpern ist auf allen Inertialsystemen das gleiche. Das funktioniert nicht in der Elektrodynamik. Bewegte Ladung induziert auf ein ruhendes System ein Magnetfeld, und ein bewegter Magnet ein elektri-

ches Feld. LORENTZ entwarf Transformationsformeln für die Inertialsysteme, welche die konstante Lichtgeschwindigkeit berücksichtigen sollen. Dabei werden Zeit und Länge im bewegten System für den ruhenden Beobachter verändert. Der bewegte Körper erscheint in Bewegungsrichtung kürzer, und die Uhren gehen auf diesem langsamer.

EINSTEIN erkannte nun, dass die LORENTZ- Transformationen die *wirkliche* Veränderung der Maßstäbe und Uhren bei Relativbewegung wiedergeben. Damit hat jeder seine eigene Zeit. Zeit und Raum sind nichts absolutes, sondern über die LORENTZ-Transformationen miteinander verknüpft. Mit dieser Interpretation gilt das Relativitätsprinzip für Inertialsysteme nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik. Die Induktionsgesetze werden so Teil von Transformationsbeziehungen der elektrischen und magnetischen Felder, welche auf diese Weise vereinigt werden.

Mit der Vorgabe der konstanten Lichtgeschwindigkeit allein wirken die LORENTZ-Transformationen noch recht willkürlich. Den entscheidenden Verständnissprung verdanken wir Hermann MINKOWSKI mit seiner geometrischen Interpretation der Zeit. MINKOWSKI nahm die Zeit als vierte Koordinate (zu den drei räumlichen), indem er setzte  $x_4 = jct$  mit  $j^2 = -1$ . Die Zeit ist demnach imaginäre Länge, oder eine Länge imaginäre Zeit. Da wir in der Zeit leben, wird ein Streckenelement in der so gebildeten Raumzeit zeitartig, d.h. mit der reellen Zeit  $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 > 0$ . Für das Licht gilt jedoch  $ds = 0$ .

Diese geometrische Interpretation der Zeit erhält ihre Berechtigung dadurch, dass mit den LORENTZ-Transformationen die Zeit selbst zur Koordinate wird. Die elektromagnetischen Wellengleichungen sind dafür sichtbares Zeugnis. Die LORENTZ-Transformationen selbst werden in der Raumzeit eine einfache Drehung der Zeitkoordinate und der x-Koordinate (bei Bewegung in x-Richtung) um einen *imaginären* Winkel  $\psi$ . Die Relativgeschwindigkeit ist dann der Tangens dieses Winkels  $v = jctan\psi$ . Die Mathematik ergibt

daraus das Additionstheorem der Geschwindigkeiten inclusive der Tatsache, dass ein Körper niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann.

MINKOWSKI hat versucht, diese Sachverhalte auf dem Papier, d.h. die Zeit als reelle Länge, darzustellen. Dazu soll unter dem Stichwort "MINKOWSKI-Kegel" auf die einschlägige Literatur verwiesen werden. Diese Analogie hat ihre Grenzen, jedoch lassen sich das so genannte Zwillingsparadoxon und ähnliche Dinge damit recht gut begreifen. S.a. [1].

Was sind Felder ? - EINSTEIN hat diese Frage für die Gravitation über den Umweg des Äquivalenzprinzips beantworten können :

Die *Spezielle Relativität*, d.h. die Bewegungsrelativität in Inertialsystemen (die auch für Elektromagnetismus gilt), hat EINSTEIN über die LORENTZ-Transformationen identifiziert. So kam EINSTEIN folgerichtig auf die Suche nach einer *allgemeinen* Bewegungsrelativität. Das ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Relativität beschleunigter Bezugssysteme.

In beschleunigten Bezugssystemen stellen wir fest, dass eine Kraft auf einen massigen Körper wirkt. Die gleiche Kraftwirkung gibt es auch im Gravitationsfeld. Wenn der Beobachter nicht *weiß*, woher die Kraft kommt, kann er es auch nicht bemerken. Daher ergibt sich aus der Frage nach der allgemeinen Relativität eine neue Frage nach den Ursprüngen der zwei Kraftwirkungen. Die Äquivalenz von träger und von schwerer Masse erhob EINSTEIN zum Prinzip, dem *Äquivalenzprinzip*.

Jetzt hilft wieder die Geometrie weiter. -

Jeder Körper beschreibt in MINKOWSKIS vierdimensionaler Raumzeit eine Kurve. Für den unbewegten Körper ist diese Kurve mit der Zeitachse identisch, bei unbeschleunigter Bewegung eine zur Zeitachse geneigte Gerade, wie in der speziellen Relativität ausgeführt. Bei Beschleunigung ergibt sich eine gekrümmte Kurve. Der wichtigste Parameter einer Kurve ist deren Krümmungsvektor. (Der Krümmungsvektor ist die totale Ablei-

tung des Tangentenvektors.) Ein Vergleich der physikalischen Parameter mit dem Krümmungsvektor ergibt Bemerkenswertes: NEWTONs Kraftgleichung  $\mathcal{F} = m \left( \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial t^2} + \mathcal{G} \right)$  besteht aus den zwei äquivalenten Teilen. Die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit ist die beschleunigte Bewegung, während  $\mathcal{G}$  summarisch die Gravitationsfeldstärke zum Ausdruck bringt. Der Krümmungsvektor enthält die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Strecke auf der Kurve, welche die Eigenzeit des beschleunigten Körpers bedeutet und somit in erster Näherung mit der Zeit des Beobachters identisch ist. Aus dem physikalischen Sachverhalt folgt zwingend, dass der Krümmungsvektor noch einen zweiten Anteil haben muß. Das ist genau dann der Fall, wenn die Raumzeit selbst gekrümmt ist ! Jegliche Krümmungen der Raumzeit gehen in die Kurvenparameter ein.

Die Kurve in der Raumzeit für *kraftfreie* Bewegung ist damit eine Geodäte, denn für diese verschwindet der Krümmungsvektor. Die Gleichung der Geodäte  $\mathcal{K} = 0$  ist physikalisch eine Bewegungsgleichung.

Die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit (nicht des dreidimensionalen Raums allein !) läßt sich verstehen analog zur Krümmung einer Fläche, wie wir sie aus dem täglichen Leben kennen. Diese Verallgemeinerung der Geometrie geht auf Bernhard RIEMANN zurück.

Das Streckenelement auf einer gekrümmten Fläche ergibt sich mit beliebigen Koordinaten auf der Fläche aus  $ds^2 = g_{11}(dx_1)^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}(dx_2)^2$ . Die allgemeine Beziehung für beliebig viele Dimensionen lautet dann  $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$  mit  $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ .

Die Koeffizienten  $g_{\mu\nu}$  bilden einen symmetrischen Tensor, welcher die Metrik der Mannigfaltigkeit komplett wiedergibt. Mit der Metrik läßt sich jeder Abstand in der Mannigfaltigkeit bestimmen. Die Metrik hängt jedoch wesentlich von den gewählten Koordinaten ab, und ist somit kein Maß für die Krümmung der Fläche respective der Raumzeit. (Die Krümmung geht jedoch in die Metrik ein !)

GAUSS fand heraus, dass die Eigenschaften einer Fläche an jedem Punkt der Fläche durch eine einzige Größe beschrieben werden ! Diese GAUSSsche Krümmung ist das Produkt aus maximaler und minimaler *vertikaler* Krümmung.

Die weiter oben beschriebenen Krümmungen sind horizontale Krümmungen, d.h. *in* der Fläche bzw. Raumzeit. Eine Geodäte kann vertikal gekrümmt sein. So wird klar, warum sich ein Blatt Papier beliebig rollen läßt. Die GAUSSsche Krümmung bleibt dort immer Null !

RIEMANN hatte die geniale Erkenntnis, dass sich die Eigenschaften einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit aus den GAUSSschen Krümmungen von in dieser befindlichen  $n(n - 1)/2$  gegenseitig orthogonalen Flächen ausdrücken lassen. In der Raumzeit sind das 6 Flächen, nämlich die 3 bekannten räumlichen Flächen und 3 Flächen, die von der Zeit und je einer räumlichen Koordinate aufgespannt werden.

O.g. GAUSSsche Krümmungen werden jetzt durch Parallelverschiebungen von Vektoren abgelöst, auf die sich der Tensor-Kalkül anwenden läßt. Tensoren sind in ihrer Gesamtheit invariante Größen. Die Tensorkomponenten genügen allgemeingültigen Transformationsgesetzen.

Diese Mathematik wurde von einer Mathematikerschule unter RICCI, LEVI-CIVITÁ und anderen zu EINSTEINS Zeiten begründet. EINSTEIN war der erste Anwender.

Diese Krümmungsmaße sind *nicht* mit der Gravitation identisch ! Dagegen besteht der enge Zusammenhang dieser Krümmungen *und damit* der Metrik mit den Kurvenparametern.

Aus dem Zusammenhang zwischen Gravitation und Krümmung der Raumzeit folgt, dass sich allgemeine Relativität nur *lokal* definieren läßt, d.h. in unmittelbarer Umgebung eines Raumzeitpunktes. Dort können wir EUKLIDISCHE Verhältnisse ansetzen. Da aber die Metrik bei Gravitation eine andere ist als ohne Gravitation, verhalten sich die lokalen Maßstäbe und Uhren anders als außerhalb des Gravitationsfeldes. Die Uhren ticken für den

äußeren Beobachter langsamer, und die Maßstäbe werden länger. Das bedeutet für den äußeren Beobachter eine geringere Lichtgeschwindigkeit im Gravitationsfeld, was zu EINSTEINS berühmter Vorhersage der Beugung von Lichtstrahlen im Gravitationsfeld führte. Die *lokale* Lichtgeschwindigkeit ist jedoch konstant  $c$  !

Es sollte noch erwähnt werden, dass das Gravitationsfeld selbst keine Energie enthält. Voneinander entfernte Beobachter können jedoch infolge Unterschiede in der Metrik verschiedene Energiezustände einunddesselben Systems wahrnehmen. Gravitation überträgt somit keine Energie, sondern vermittelt diese.

Mit der Allgemeinen Relativitätstheorie haben wir die paradoxe Situation, dass die Gravitation aus der Geometrie der Raumzeit abgeleitet wird, während die Massen als Gravitation “erzeugend” angesehen werden, und deren Struktur ungeklärt bleibt. Dieses Paradoxon kann nur im Zusammenhang mit weiteren bis dahin ungeklärten Fragen gesehen werden:

- Was ist Elektromagnetismus ?
- Wie ist das mit der Quantisierung ?

Die Quantisierung physikalischer Größen ist eine Erfahrungstatsache, welche sich auch dadurch manifestiert, dass statistische Methoden mit Erfolg angewendet wurden. Es ist anzunehmen, dass die drei ungeklärten Fragen nur im Zusammenhang zu lösen sind.

Vernünftige Antworten auf Fragen an die Natur darf man nur erhoffen, wenn diese Fragen unvoreingenommen sind. Das bedeutet, es dürfen keine Antworten erwartet oder gar vorgegeben werden. Im Zusammenhang mit den drei ungelösten Fragen erscheinen folg. konkrete Fragestellungen sinnvoll:

- 1) Welche Größen werden erhalten ?
- 2) Welche Größen haben diskrete Werte ?

Erhalten werden die “materiellen” Größen Masse, Drehimpuls, elektrische Ladung und magnetisches Moment. Wegen der aus der speziellen Relativität folgenden Äquivalenz von Masse und Energie folgt die Energieerhaltung auch aus der Erhaltung der Masse. Die Mathematik gibt nun die überraschende Antwort, wann diese Größen diskrete Werte annehmen: *als Integrationskonstanten quellenfreier partieller Differentialgleichungen !*

Das ist zum Beispiel bei Vorliegen eines Randes der Fall, wobei allerdings nicht der klassische Rand der Potentialtheorie erwartet werden darf. Die konkreten Verhältnisse lassen sich z.B. mittels numerischer Simulation feststellen.

Masse und Drehimpuls sind die ersten Integrationskonstanten von EINSTEINS Gravitationsgleichungen, und Ladung und magnetisches Moment die in den MAXWELL-Gleichungen. Verteilte Massen und Impulse sowie verteilte Ladungen und Ströme gibt es nicht !

Die Nichtexistenz verteilter Ladungen und Ströme wird auch aus den in der Elektrotechnik bekannten Maschen- und Knotensätzen deutlich, wenn die Maschen und Knoten sehr klein werden. Das ist kein Widerspruch zu der Tatsache, dass in einer Masche Strom und zwischen zwei Knoten Spannung gemessen wird.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich EINSTEIN- und MAXWELL-Gleichungen über den Energietensor des elektromagnetischen Feldes vereinigen. Die resultierenden quellenfreien EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen<sup>1</sup> erhalten dann rein geometrische Bedeutung !

Die Quellen sind eine äquivalente Darstellung von angehäuften Singularitäten aus den Integrationskonstanten. Jedoch wird mit den Quellen der Energiesatz verletzt. - Bei numerischen Simulationen treten keine Singularitäten auf, wenn man die Existenz *geometrischer Grenzen* akzeptiert.

Die Möglichkeit, die materiellen Größen als Integrationskonstanten darzustellen, ist bekannt, wird jedoch bis jetzt nicht akzeptiert. Warum eigent-

---

<sup>1</sup>zitiert in [1]



lich ? Es widerspricht der von Ernst MACH begründeten Vorstellung, dass “Materie” im Raum schweben und (sekundär) die Felder erzeugen und damit die Struktur des Universums bestimmen. Tatsächlich wird aber diese Art von Materie nicht gebraucht. Materie manifestiert sich in den Integrationskonstanten. Für den Preis der *traditionellen* Materie entfallen sämtliche physikalischen (Energiesatz !) *und* mathematischen Schwierigkeiten.

Die Teilchen sind dann diskrete (elementare) Lösungen der quellenfreien EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen. Dafür gibt es bereits signifikante Hinweise aus numerischen Simulationen ! [1] -

Innerhalb Toleranzen von  $\pm 5\%$  führen die äquivalenten Integrationskonstanten zu meist stabilen Lösungen, wenn deren Werte mit den gemessenen Werten von Spin, Ladung, magnetischem Moment übereinstimmen und geometrische Grenzen beim mutmaßlichen Teilchenradius auftreten. Diese vier Werte bedingen sich gegenseitig !

Obwohl es nur von diskreten Werten der Integrationskonstanten Lösungen gibt, ist eine solche Lösung im Nahfeld vieldeutig. Bei Atomkernen hat das Nahfeld eine Ausdehnung der Größenordnung  $10^{-15}\text{m}$ , bei komplexeren Lösungen (Atome, Moleküle &c.) wesentlich mehr.

In der Frage, wie sich Photonen aus den EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen ergeben, sei auf [1] verwiesen. Dort sind auch ausführliche Berichte und Ergebnisse aus numerischen Simulationen zu finden.

Wir haben festgestellt, dass in der geometrischen Analogie die Gravitation zusammen mit der beschleunigten Bewegung einen Kurvenparameter darstellt, nämlich den Krümmungsvektor der Kurve in der Raumzeit. Die sehr ähnlichen Eigenschaften des Elektromagnetismus, vor allem die Ausbreitung im Vakuum, zwingen zu dem Schluß, dass es sich ebenfalls um Kurvenparameter handelt. Das muß so sein, weil jedes Meßgerät eine solche Kurve in der Raumzeit beschreibt. Die Gesamtheit dieser Kurven ist ausreichend, die Krümmungsverhältnisse in der Raumzeit umfassend zu beschreiben.

Während Gravitation und beschleunigte Bewegung einen (die Kurve) begleitenden Vektor bilden, läßt sich Elektromagnetismus aus zwei begleitenden Flächen darstellen, die von je zwei Vektoren aufgespannt werden. - Der Krümmungsvektor ist raumartig und unmittelbar zu spüren. Der Begriff “unten” meint nichts anderes als die *Richtung* des Krümmungsvektors aus dem Gravitationsfeld der Erde. Die Flächen aus elektromagnetischen Feldern sind leider nicht so direkt zu spüren. An dieser Stelle kann nur gesagt werden, dass es sich um zwei duale Flächen mit ganz besonderen Krümmungseigenschaften handelt (näheres s. [1]). Die quellenfreien EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen involvieren eine besondere Geometrie, die ausschließlich in der vierdimensionalen Raumzeit möglich ist. Es *ist die* Geometrie der Raumzeit, und diese ist einzigartig ! Die Raumzeit erlaubt keine andere Geometrie !

Die begleitenden Flächen manifestieren den Unterschied zwischen elektrischem und magnetischem Feld, weil die eine Fläche in einer Dimension zeitartig ist. Es gibt deshalb auch keine Symmetrie zwischen Elektrizität und Magnetismus !

Die Einzigartigkeit der Geometrie der Raumzeit kommt auch in der unvollständigen Kausalität zum Ausdruck. Die quellenfreien EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen bilden für 14 Variable nur 10 unabhängige Gleichungen, was sehr viele Freiheitsgrade bedeutet. In der physikalischen Wirklichkeit kommt jedoch die besondere Rolle der Zeit zum Tragen. Da wir in der Zeit leben, ist die Welt in erster Näherung kausal. (Dies läßt sich mathematisch begründen.) Im Mikrobereich trifft dies nicht mehr zu !

Die Metrik ist zwar nicht das Feld selbst, jedoch läßt sich leicht einsehen, dass diese von Krümmungen der Raumzeit beeinflusst wird. Ganz praktische Berechnungen ergeben folg. Tendenzen:

Gravitation äußert sich *für den entfernten Beobachter* darin, dass die Uhren langsamer ticken und die Maßstäbe länger werden. Dagegen geht Elektroma-

gnetismus quadratisch in die Metrik ein. Die Uhren ticken schneller und die Maßstäbe werden kürzer, beim elektrischen Feld in Richtung der Feldstärke und beim magnetischen Feld senkrecht zur Feldstärke.

Die Maßstabsverkürzung beim elektrischen Feld hat ganz praktische Konsequenzen: Durch die kürzere Strecke wird die Feldstärke größer, damit die Strecke noch kürzer usf. Das bedeutet eine Rückkopplung, die zu einer Nullstrecke zwischen zwei Punkten mit endlichem Abstand im Koordinatensystem führt. Der unbefangene Leser mag sich fragen, wie Blitze und Tunneleffekte mit Überlichtgeschwindigkeiten zustandekommen.

Numerische Simulationen führen regelmäßig zu einer geometrischen Grenze, wo es keine Zeit gibt. Innerhalb dieser Grenze gibt es gar nichts, weder Raum noch Zeit ! Es ist deshalb müßig zu spekulieren, was sich innerhalb eines Teilchens befinden mag.

*Der Autor verdankt einer Diskussionsrunde mit den Herren Prof. Manfred Geilhaupt, Dr. Gerhard Herres und Werner Mikus interessante Anregungen für diese Arbeit. Besonders hervorzuheben sind wertvolle Hinweise von Herrn Mikus, welche die Allgemeinverständlichkeit betreffen.*

*Referenz :*

[1] BRUCHHOLZ, U. : <http://bruchholz.psf.net/> .

Weitere Referenzen in ./article2.txt

Über die besondere Rolle der Geometrie (allgemeinverständlich) s.

./Geometrie.pdf

Die geometrische Theorie als Lehrbuch s. ./Textbook.pdf

Über numerische Simulationen ./feldber-.htm oder ./feldber.zip

S.a. selfdoing.html

Ableitung der Photonen in ./h-article.pdf

Ableitung der Geometrie des Elektromagnetismus im Lehrbuch und in

./Ricci\_Main\_Dir.txt

Dieses Dokument wurde mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X erstellt.